UNIVERSIDADE FRANCISCANA

Curso de Matemática

Dejalma Romeu Langbecker Junior

O ESTUDO DE MATRIZES E SUAS APLICABILIDADES: PROPOSTAS DE ATIVIDADES DE ENSINO PARA A EDUCAÇÃO BÁSICA

Santa Maria, RS.

2020

Dejalma Romeu Langbecker Junior

O ESTUDO DE MATRIZES E SUAS APLICABILIDADES: PROPOSTAS DE ATIVIDADES DE ENSINO PARA A EDUCAÇÃO BÁSICA

Trabalho Final de Graduação II apresentado à banca de professores do Curso de Matemática da Universidade Franciscana, como requisito para aprovação na disciplina.

Professora Orientadora: Karla Jaqueline Souza Tatsch

Santa Maria, RS.

2020

RESUMO

Este trabalho explora o estudo de matrizes no ensino médio da educação básica com objetivo de elaborar atividades de ensino que contemplem a aplicabilidade de conhecimentos que envolvam matrizes para o ensino médio da educação básica. Este estudo justifica-se pela necessidade de pensar situações de ensino, como professor de matemática em formação inicial, com potencial para conquistar o interesse e para potencializar a aprendizagem com significado para alunos da educação básica. A metodologia de pesquisa utilizada foi revisão bibliográfica exploratória, procurando sustentação teórica para justificar e alcançar o objetivo. Estudando as matrizes, com todas as suas definições e propriedades pôde-se identificar quais aspectos desse objeto matemático caberiam na elaboração de situações de ensino que contemplassem a aplicabilidade. Ao construir as situações que permitem aplicações, entende-se a importância deste objeto de conhecimento para a formação do aluno e como ele pode se apresentar em situações cotidianas, agregando saberes à formação inicial do autor, futuro professor de Matemática. Conclui-se que é possível trabalhar com matrizes utilizando-se de suas aplicações e contextualizando-as em atividades de ensino com potencial para oportunizar o interesse dos alunos e trazer significados para seus aprendizados. Respondeu-se ao problema de pesquisa criando atividades relacionadas ao estudo de matrizes para o ensino básico.

Palavras-chave: Aplicações de Matrizes. Ensino e Aprendizagem da Matemática. Ensino Médio. Formação docente.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

As dificuldades relacionadas à complexidade de alguns objetos de conhecimento da Matemática e com seu nível de abstração e generalização somados aos conceitos e algoritmos com baixa relação com suas aplicabilidades podem estar influenciando o insucesso na aprendizagem da Matemática na educação básica retratados pelos índices de avaliação externa aplicadas nos últimos anos. A falta de conexão com o mundo real pode dificultar a valorização, pelo aluno, dos conhecimentos matemáticos estudados na escola.

A dificuldade de aprendizagem e a necessidade da apresentação das possíveis aplicabilidades de objetos matemáticos resulta na identificação, pelos professores, da importância do uso de metodologias e recursos de ensino diferenciados, no intuito de atingir a totalidade dos alunos no processo educativo.

A partir dessas considerações, trabalhou-se para responder ao problema de pesquisa: Como contemplar algumas aplicabilidades de conhecimentos que envolvem Matrizes para o ensino médio da educação básica?

Para a realização deste trabalho final de graduação, realizado no curso de licenciatura em Matemática, na busca pelo alcance a respostas ao problema, buscou-se elaborar atividades de ensino que contemplem a aplicabilidade de conhecimentos que envolvem Matrizes para o ensino médio da educação básica, como objetivo geral. E, a partir desse objetivo geral, os objetivos específicos foram: identificar o que ensinar, sobre Matrizes, no ensino médio da educação básica; pesquisar sobre a importância do ensino de Matrizes na Educação Básica; verificar meios para abordar o objeto matemático Matrizes por meio de algumas aplicabilidades; e contribuir para com a construção de saberes pedagógicos ao autor, futuro professor de Matemática.

Este trabalho justifica-se na necessidade de pensar situações de ensino, como professor de Matemática em formação, com potencial para conquistar o interesse e viabilizar situações de aprendizagem com significado para alunos da educação básica. O estudo de Matrizes não pode se apresentar aos alunos da educação básica como um conhecimento abstrato, lhes exigindo apenas uma aceitação de conceitos e sequências de cálculos, sem o estabelecimento das necessárias conexões deste com outros objetos de conhecimento da Matemática e com outras áreas, pois isso pode levar a uma limitação do campo de entendimento de cada um deles.

Faz-se necessário um ensino deste objeto matemático sobre levando os alunos a compreender e estabelecer conexões com outros objetos de conhecimento para que possam compreender a importância do desenvolvimento de habilidades relacionadas ao estudo de Matrizes, desde a educação básica.

2 MATRIZES

Para dar início à pesquisa, buscou-se por um estudo exploratório sobre Matrizes, por parte do autor, futuro professor de Matemática, como forma de retomar seus conhecimentos, para entendimento do contexto em que essas são exploradas, no ensino médio da educação básica, dado seu entendimento de que, para construir conhecimentos sobre o ensino, é preciso ter conhecimento solidamente construído sobre o objeto matemático em questão.

A construção de tabelas é uma atividade bastante usada em vários campos, tais como na administração, saúde, engenharia, computação, entre outros. Isso ocorre pela versatilidade em organizar informações de um dado evento em linhas e colunas, relacionando os respectivos valores em análise. Essa tabela, uma caixa retangular, contém diferentes informações, que além de estarem organizadas em linhas e colunas, estão relacionadas entre si e com o tema em análise.

Essa relação se estabelece pelo encontro entre linhas horizontais e verticais da tabela. Este encontro forma uma célula, conhecida pelo seu uso em planilhas, e nesta célula encontra-se a informação que tem relação com a linha e com a coluna que a compõe.

Considerando que esta tabela seja escrita com conteúdo matemático e que tenhamos propriedades e definições relacionadas com suas colunas e linhas, como também todas possíveis operações que possam ser feitas com o seu conteúdo, tem-se uma Matriz. Matriz, desta forma, pode ser percebida como uma estrutura retangular, com informações de determinado conteúdo e contexto, organizado em linhas e colunas.

Matriz, então, pode ser definida como uma tabela formada por números reais distribuídos em “m” linhas e “n” colunas, sendo m e n dois números naturais diferentes de zero. Os elementos desta matriz, que pode ser denotada como Matriz A_{mxn}, são indicados por a_{ij}, no qual o índice i indica a linha em que ele está localizado e o j indica a coluna em que aparece o respectivo elemento. Cada um desses elementos é comumente chamado “entrada” de uma matriz.

De forma geral, pode-se escrever a Matriz A_{mxn} da seguinte forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

A quantidade de linhas e colunas que compõe uma matriz é chamada ordem.

A relação de ordem é composta por m e n, ambos números naturais e diferentes de zero.

Entende-se que a Matriz de menor ordem que existe é aquela composta por apenas uma linha e uma coluna.

Abaixo, apresentam-se exemplos de três Matrizes, ambas com suas respectivas ordens:

$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ é uma Matriz de ordem 2 x 3, pois tem duas linhas e três colunas.

$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ é uma Matriz de ordem 2 x2, uma vez que possui duas linhas e duas colunas.

$C = \begin{Vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & \sqrt{3} \\ \frac{1}{2} & -1 & -6 \end{Vmatrix}$ é uma Matriz de ordem 4 x 3, tendo quatro linhas e três colunas.

É possível notar que tanto os colchetes, quanto os parenteses ou as barras podem ser usados para compor a apresentação dos elementos de uma Matriz.

Neste trabalho optou-se por, a partir dessa etapa da escrita, utilizar somente colchetes toda vez que representa-se uma Matriz.

É importante salientar que a variação nas ordens das Matrizes gera vários tipos diferentes de Matrizes.

Segue, abaixo, alguns exemplos de classificação de Matrizes:

A = $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ é uma Matriz de ordem 1x3, ou seja, uma linha e 3 colunas, também conhecida como Matriz linha.

B = $\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$, é uma Matriz de ordem 2x1, duas linhas e uma coluna, também conhecida como Matriz coluna.

$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

C = , Matriz de ordem 2x2, duas linhas e duas colunas, e quando linhas e colunas têm a mesma quantidade nomeia-se Matriz quadrada.

D = $\begin{bmatrix} 3 & 4 & -8 & 3 & 2 \\ -4 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, Matriz de ordem 2x5, com duas linhas e cinco colunas.

E = [0] , é uma Matriz de ordem 1x1. É uma Matriz com um único elemento, o zero. Matrizes que têm todos seus elementos com o valor zero são consideradas como Matriz nula.

Algumas Matrizes são consideradas como especiais e segundo Iezzi (1977), possuem uma utilidade muito maior na teoria. Conforme o desenvolvimento de atividades com Matrizes vai acontecendo e o surgimento de Matrizes especiais, principalmente a quadrada, torna-se bem evidente.

2.1 Tipos de Matrizes

Algumas Matrizes são consideradas especiais, seja pela quantidade de linhas ou colunas que possui, ou por sua maior aplicabilidade na resolução de problemas, tendo as seguintes classificações: Nula, Linha, Coluna, Quadrada, Triangular, Diagonal, Escalar, Identidade e Simétrica.

> Ao trabalhar com matrizes, observamos que existem alguns que, seja pela quantidade de linhas ou colunas, ou ainda, pela natureza de seus elementos, têm propriedades que as diferenciem de uma matriz qualquer. Além disso, estes tipos de matrizes aparecem frequentemente na prática e, por isso, recebem nomes especiais (BOLDRINI, 1980, p. 3).

2.1.1 Matriz Nula

A Matriz nula é aquela em que todas as suas entradas são zero, sendo a Matriz A=$[a_{ij}]_{mxn}$, e a_{ij}=0, temos que A=$[0]_{mxn}$. Exemplo:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{3x2}$$

2.1.2 Matriz Linha

A Matriz linha é aquela que possui apenas uma linha, ou seja, m=1. Sendo A=$[a_{ij}]_{1xn}$, em que m=1. Exemplo:

$$A= \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{1X3}$$

2.1.3 Matriz Coluna

É a Matriz que possui apenas uma coluna, isto é, n=1. Sendo $A=[a_{ij}]_{mx1}$, em que n=1. A seguir, a Matriz A_{3x1}, um exemplo de Matriz Coluna:

$$A=\begin{bmatrix} -6 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{3x1}$$

2.1.4 Matriz Quadrada

A Matriz é dita quadrada quando possui a mesma quantidade de linhas e colunas, então m=n. Este tipo de Matriz possui uma diagonal principal e uma secundária. A principal é composta por elementos em que "i"="j", ou seja, a_{ij}=x, sendo que i e j são iguais. Exemplos são os elementos a_{11}, a_{22}, a_{33}. Já a diagonal secundária é composta por elementos em que i=(n+1)-j, sendo n= ordem da Matriz, como apresenta-se o exemplo da Matriz A_{3x3}, a seguir, com seus elementos a_{31}, a_{22}, a_{13}:

$$A_{3x3}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Diagonal Secundária *Diagonal Principal*

Uma Matriz quadrada de ordem 2, possui duas linhas e duas colunas, do mesmo modo que uma de ordem 3 possui três linhas e três colunas. Como exemplos, a Matriz A_{2x2} e a Matriz B_{3x3}, abaixo:

$$A_{2X2}=\begin{bmatrix} 5 & -12 \\ 0 & -7 \end{bmatrix} \text{ e } B_{3X3}=\begin{bmatrix} 32 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \\ -13 & 10 & 1 \end{bmatrix}$$

2.1.5 Matriz Triangular Superior ou Inferior

A Matriz triangular superior é aquela em que os valores se encontram abaixo da diagonal superior são todos iguais a zero, ou seja, a_{ij}=0, sendo i>j. E a triangular inferior, é aquela em que os elementos que estão acima da diagonal principal é que são nulos, a_{ij}= 0, sendo i<j.

A seguir, dois exemplos, sendo a matriz A_{3x3} uma Matriz triangular superior e a matriz B_{3x3} um exemplo de Matriz triangular inferior:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -5 & 2 & 0 \\ 7 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

2.1.6 Matriz Diagonal

É toda Matriz quadrada em que todos os elementos fora da diagonal principal são iguais a zero, para todo $a_{ij} = 0$, quando $i \neq j$. Mas, isto não impede que tenha um ou mais, inclusive todos, elementos na diagonal principal que também seja igual a zero. Um exemplo disto é uma Matriz quadrada nula, que também é uma Matriz diagonal pois satisfaz a alegação de ter obrigatoriamente todos elementos fora da Matriz principal iguais a zero.

Abaixo, a Matriz A_{3x3}, um exemplo de uma Matriz diagonal.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3x3}$$

2.1.7 Matriz Escalar

A Matriz diagonal $M=[a_{ij}]$, que todas as entradas da diagonal principal são iguais. Ou seja, $a_{ij}=a_{ij}$, quando $i=j$, $a_{ij}\neq 0$.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}_{2x2}$$

2.1.8 Matriz Identidade

A Matriz diagonal é uma Matriz quadrada em que todos as entradas da diagonal principal são iguais a um, $a_{ij}=1$, sendo $i=j$ é denominada Matriz identidade.

Então, numa Matriz diagonal $A=[a_{ij}]$, $a_{ij}=0$ para $i\neq j$ e $a_{ij}=1$ para $i=j$. A Matriz identidade geralmente é nominada por I_n, onde n é a sua ordem.

$$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathrm{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathrm{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.1.9 Matriz Simétrica

É toda Matriz quadrada, m=p, em que $a_{ij}=a_{ji}$.

Considerando que a Matriz quadrada tem uma parte superior, acima da diagonal principal, e uma inferior, abaixo da principal, tem-se:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -4 \\ 3 & -4 & -2 \end{bmatrix}_{3x3}$$

$a_{12}=a_{21}=1$; $a_{31}=a_{13}=3$; $a_{32}=a_{23}=-4$

Segundo Boldrini (1980), no caso de uma Matriz simétrica, a parte superior é como um reflexo da parte inferior, em relação a sua diagonal principal.

2.2 Operações com Matrizes

As operações com Matrizes estão definidas em M_{mxn}, onde quaisquer que sejam as operações, o resultado vai ser, obrigatoriamente, uma Matriz.

Estão definidas, a seguir, as operações de adição e multiplicação, como também as relações de igualdade, a oposta de uma Matriz, Matriz de transposição e inversão de Matriz.

2.2.1 Igualdade de Matrizes

Para que duas Matrizes ou mais sejam consideradas iguais é necessário que possuam a mesma ordem, mesmo número de linhas e colunas, e que todas as entradas correspondentes sejam iguais. Nas duas ou mais Matrizes iguais, $a_{ij}=b_{ij}$ para qualquer i e j.

Segundo Anton (2012), se temos duas Matrizes $[A]=a_{ij}$ e $[B]=b_{ij}$ de mesmo tamanho, pode-se escrever $(A)_{ij}=(B)_{ij}$ ou também $a_{ij}=b_{ij}$.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & 5 & -4\\ 3 & -4 & -2\end{bmatrix}_{3x3},B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & 5 & -4\\ 3 & -4 & -2\end{bmatrix}_{3x3}$$

$a_{11}=b_{11}$, $a_{12}=b_{12}$, $a_{13}=b_{13}$

$a_{22}=b_{22}$, $a_{22}=b_{22}$, $a_{23}=b_{23}$

$a_{31}=b_{31}$, $a_{32}=b_{32}$, $a_{33}=b_{33}$

Considerando uma relação de igualdade, sendo A uma Matriz mxn e B uma Matriz mxn, pode-se denotar A=B.

Tratando de modo genérico e sendo A e B Matrizes de ordem 2,

$$A_{2X2}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}, \mathrm{B}=\begin{bmatrix}-a_{11} & -a_{12}\\ -a_{21} & -a_{22}\end{bmatrix}$$

Oposto de uma Matriz: Percebe-se que a Matriz B é o oposto da Matriz A se todas as suas entradas são opostas aos elementos correspondentes de A.

Seguem, abaixo, exemplos de Matrizes opostas, onde B é oposta a A.

$$\mathrm{A}_{3X3}=\begin{bmatrix}32 & 0 & -1\\ 5 & 0 & 2\\ -13 & 10 & 1\end{bmatrix}, \mathrm{B}_{3x3}=\begin{bmatrix}-32 & 0 & 1\\ -5 & 0 & -2\\ 13 & -10 & -1\end{bmatrix}$$

$$A_{2X2}=\begin{bmatrix}-5 & 3\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \mathrm{B}_{2x2}=\begin{bmatrix}5 & -3\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

Em ambos os exemplos A e B são Matrizes opostas, podendo-se escrever que A = - B.

2.2.2 Adição entre Matrizes

Do mesmo modo que a igualdade de Matrizes a operação de adição entre duas delas pode ocorrer, somente, se ambas forem de mesmo tamanho. Para Anton (2012) em denotação matricial temos:

$$(A+B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Nota-se que as entradas correspondentes são adicionadas uma a uma e o resultado é a entrada correspondente na Matriz soma. O elemento $a_{11} + b_{11} = 2+2=4=c_{11}$ e assim, com todos os demais elementos.

A seguir, a adição entre as Matrizes A e B, sendo C a Matriz Soma.

$$[A] + [B] = [C]$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

A subtração de Matrizes também segue a mesma definição, tendo como condição necessária que ambas possuam a mesma ordem.

Desta forma, pode-se denotar que, sendo A e B Matrizes m x n, A - B é igual a:

$$A - B = A + (-B) = [a_{ij}] + [-b_{ij}] = [a_{ij} - b_{ij}] = [c_{ij}]$$

Nesta definição de subtração de Matrizes não haverá exemplos, ainda, tendo em vista que será necessário o conhecimento de multiplicação da Matriz por um escalar, para esse entendimento.

Dentro das operações de adição das Matrizes existem as propriedades que abrangem outras situações, facilitando o entendimento da álgebra.

> Você talvez já tenha se questionado quanto `a necessidade ou utilidade de se listar e provar as propriedades de uma dada operação. Comutatividade, associatividade... aparentemente sempre as mesmas palavras, propriedades sempre válidas. No entanto, são as propriedades que nos permitem estender uma operação que foi definida para duas matrizes, para o caso de somar três ou mais. Elas, também, flexibilizam e facilitam os cálculos, de modo que quanto mais as dominamos, menos trabalho “mecânico” temos que desenvolver. (FIGUEREDO, 2009, p. 21).

As propriedades da operação de adição de Matrizes: associativa, comutativa, elemento neutro e simétrica. É possível trabalhar com quatro significantes propriedades e suas referidas provas no ensino médio.

I. Associativa: (A+B)+C = A+(B+C) quaisquer que sejam A, B e C do tipo m x n. Considerando $A=[a_{ij}]_{mn}$, $B=[b_{ij}]_{mxn}$ e $C=[c_{ij}]_{mxn}$

$$(A+B)+C = [(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}]_{mxn} \quad \boxed{\text{associativa}}$$

$=[a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})]_{mxn}$ soma

$=[a_{ij}]_{mxn}+[b_{ij}+c_{ij}]_{mxn}$

$(A+B)+C=A+(B+C)$

II. Comutativa: A+B= B+A, quaisquer que sejam A, B do tipo m x n. Considerando as Matrizes $A=[a_{ij}]_{mxn}$ e $B=[b_{ij}]_{mxn}$

$A+B=[a_{ij}]_{mxn}+[b_{ij}]_{mxn}$

$=[a_{ij}+b_{ij}]_{mxn}$

$=[(a_{ij}+b_{ij})]_{mxn}$ Propriedade comutativa

$=[(b_{ij}+a_{ij})]_{mxn}$

$=[b_{ij}+a_{ij}]_{mxn}$

=B+A, então:

A+B=B+A

III. Elemento Neutro.

$A=[a_{ij}]_{mxn}$ e $0=[0]_{mxn}$ Soma de matrizes

$A+0= [a_{ij}+0]_{mxn}=[(a_{ij}+0)]_{mxn}$ Propriedade do elemento

$a_{ij}+0=a_{ij}$, para todo i,j E R. Então

$[a_{ij}+0]_{mxn}=[a_{ij}]_{mxn}=A$

A+0=A

IV. Todo elemento tem simétrico: para todo A do tipo m x n:

∃ A'/ A + A" = 0

Nota-se que a ordem em que os elementos das Matrizes são adicionados não é importante, pois não altera o resultado. Além disso, existe um elemento neutro que somado a qualquer Matriz A m x n, resultará na própria Matriz A. Este elemento neutro 0 (zero) que é a própria Matriz nula $[0]_{mxn}$. E, do mesmo modo, adicionando uma Matriz A_{mxn} com seu simétrico resultará numa Matriz nula.

2.2.3 Multiplicação de um Número Real por Matriz

Considerando A uma Matriz e x um número real, a operação multiplicação de x por A, denomina-se em xA, resultando numa nova Matriz em que suas novas entradas são o resultado da multiplicação de x por cada um dos elementos de A, $x*a_{ij}$.

> Dado um número k e uma matriz $A=(a_{ij})_{mxn}$ chama-se produto kA a matriz $B=(b_{ij})_{mxn}$ tal que $b_{ij}= ka_{ij}$ para todo i e todo j. Isto significa que multiplicar uma matriz A por um número k é construir uma matriz B formada pelos elementos de A todos multiplicados por k (IEZZI, 1977, p.43-D).

Exemplos de multiplicações de Matrizes por um número real, a seguir:

$$3*\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & -9 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \qquad 0{,}5*\begin{bmatrix} 16 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \\ -15 & 10 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & -0{,}5 \\ 2{,}5 & 0 & 1 \\ -7{,}5 & 5 & 0{,}5 \end{bmatrix}$$

Sendo A_{mxn} e B_{mxn}, ambas Matrizes de mesma ordem, e x, y valores numéricos reais, tem-se cada uma das seguintes propriedades, com as suas respectivas provas.

I. Associativa: x(yA) = (xy)A. Sejam x e y dois escalares e a matriz $A=[a_{ij}]$

$$x(yA) = [x(yA)]_{ij} \qquad \boxed{\text{Definição}}$$
$$= [x(ya_{ij})]$$
$$= [xy(a_{ij})] = (xy)A \qquad \boxed{\text{Associativa}}$$

II. Distributiva de uma número Real em relação a adição de Matrizes: x(A+B) = xA + xB. Sejam as Matrizes $A=[a_{ij}]$ e $B=[b_{ij}]$, ambas de mesma ordem, e x um número real.

$$x(A+B)= [x(A+B)]_{ij} \qquad \boxed{\text{Definição e propriedade de soma}}$$

III. Distributiva de uma Matriz em relação a soma de dois números reais: (x+y)A= xA+yA. Sejam x e y dois escalares e a Matriz $A=[a_{ij}]_{mxn}$

$$(x+y)[a_{ij}]_{mxn} = [(x+y)a_{ij}]_{mxn} \qquad \boxed{\text{Distributiva}}$$
$$[(xa_{ij})+(ya_{ij})]_{mxn}$$
$$[xa_{ij}]_{mxn}+[ya_{ij}]_{mxn}$$
$$x[a_{ij}]_{mxn}+y[a_{ij}]_{mxn}$$

xA+yA. Logo,

$$(x+y)A= xA + yA$$

$=[1a_{ij}]_{mxn}$

IV. Elemento Neutro: 1.A=A. Seja $A=[a_{ij}]$ e 1 E R

$$\begin{aligned}
&1 \cdot A = 1 \cdot [a_{ij}]_{mxn} \\
&= [1 \cdot a_{ij}]_{mxn} \\
&= [(1 \cdot a_{ij})]_{mxn} \rightarrow \text{elemento neutro} \\
&= [a_{ij}]_{mxn} = A \text{, então :} \\
&1 \cdot \mathrm{A} = \mathrm{A}
\end{aligned}$$

Ao trabalhar com subtração de Matrizes chegou-se que A –B = A+(-B) que na verdade é igual a A+(-1*B). O escalar -1 multiplica a Matriz B obtendo uma Matriz oposta de B que vai ser adicionada à Matriz A.

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \\ -3 & 7 & 1 \end{bmatrix} + \left(-1^* \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \\ -3 & 7 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1^*1 & -1^*-1 & -1^*0 \\ -1^*3 & -1^*5 & -1^*-3 \\ -1^*0 & -1^*0 & -1^*4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \\ -3 & 7 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5-1 & 0+1 & -1+0 \\ 5-3 & 0-5 & 2+3 \\ -3+0 & 7+0 & 1-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & -5 & 5 \\ -3 & 7 & -3 \end{bmatrix}$$

Tanto nas operações de adição de Matrizes como na multiplicação de uma Matriz por um número real, é possível observar que as operações são feitas nas entradas, não mexendo na estrutura. Isto não acontece na multiplicação entre Matrizes.

2.2.4 Multiplicação entre Matrizes

Dada duas Matrizes $A=[a_{ij}]_{mxn}$ e $B=[b_{jk}]_{nxp}$, o produto entre elas, ou seja, o resultado de A.B, é uma Matriz terceira, $C=[c_{ik}]_{mxp}$, onde cada elemento c_{ik} é definido por meio da soma dos produtos dos elementos correspondentes da i-ésima linha de A pelos elementos da k-ésima coluna de B.

Segundo Iezzi (1977, p. 45D) define-se o produto A.B entre essas duas Matrizes como:

$$
\begin{aligned}
c_{ik} &= a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + a_{i3} \cdot b_{3k} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nk} \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk} \text{ para todo i} \in \{1,2,\ldots,m\} \text{ e todo k} \in \{1,2,\ldots,\text{p}\}
\end{aligned}
$$

Assim, nota-se que o produto entre duas Matrizes não pode ser resolvido com a multiplicação de seus elementos. Ocorre de maneira diferente que uma multiplicação de números reais e também do método de soma das Matrizes.

> A definição de multiplicações de matrizes exige que o número de colunas do primeiro fator A seja igual ao número de linhas do segundo fator B para que seja possível formar o produto AB. Se essa condição não for satisfeita, o produto não estará definido. Uma maneira conveniente de determinar se o produto de duas matrizes está ou não definido é escrever o tamanho do primeiro fator e, a direita, escrever o tamanho do segundo fator. Se, ..., os números internos coincidirem, então o produto estará definido (ANTON, 2012, p. 45).

Sendo as Matrizes $A=[a_{ij}]_{mxp}$, $B=[b_{ij}]_{pxn}$ e $C=[c_{ij}]_{mxn}$, pode-se representar assim:

$$
\begin{aligned}
&A \cdot B = C \\
&mxp \cdot pxn = mxn
\end{aligned}
$$

Observa-se que o número de colunas da Matriz A, p, tem que ser igual ao número de linhas da Matriz B, p. Assim, a Matriz resultante, C, da multiplicação A.B, tem a mesma quantidade de linhas que a Matriz A, m, e a mesma quantidade de colunas que a Matriz B, n.

Depois que esta condição for satisfeita coloca-se em prática a definição de produto das Matrizes. Considerando $A=[a_{ij}]_{2x3}$, $B=[b_{ij}]_{3x2}$ e o resultado do produto de A.B, sendo $C=[c_{ij}]_{2x2}$.

$$
A = \begin{bmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \end{bmatrix}_{2x3}, \mathrm{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{b11} & \mathbf{b12} \\ b21 & b22 \\ b31 & b32 \end{bmatrix}_{3x2} \text{ e } \mathrm{C} = \begin{bmatrix} \mathrm{c}11 & \mathrm{c}12 \\ c21 & c22 \end{bmatrix}_{2x2}
$$

$$
A \cdot B = C
$$

$$
\begin{bmatrix} \boxed{a11 \quad a12 \quad a13} \\ \boxed{a21 \quad a22 \quad a23} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} \mathbf{b11} \\ b21 \\ b31 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} \mathbf{b12} \\ b22 \\ b32 \end{matrix}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{c}11 & \mathrm{c}12 \\ c21 & c22 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
c11 &= a11 \cdot b11 + a12 \cdot b21 + a13 \cdot b31 \\
c12 &= a11 \cdot b12 + a12 \cdot b22 + a13 \cdot b32 \\
c21 &= a21 \cdot b11 + a22 \cdot b21 + a23 \cdot b31 \\
c22 &= a21 \cdot b12 + a22 \cdot b22 + a23 \cdot b32
\end{aligned}
$$

Fazendo o produto de uma Matriz A de ordem 2x3 com uma Matriz B de ordem 3x2, resulta uma Matriz C de ordem 2x2.

A seguir, um exemplo numérico em que o produto entre a Matriz A e a Matriz B estão definidos:

$$\text{Seja A=}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}_{3\,x\,2} \quad \text{e B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{2\,x\,3}$$

$$\text{AB=}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}_{3\,x\,2} . \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{2\,x\,3} = \begin{bmatrix} 2.1+3.(-2) & 2.2+3.0 & 2.3+3.4 \\ 0.1+1.(-2) & 0.2+1.0 & 0.3+1.4 \\ -1.1+4.(-2) & -1.2+4.0 & -1.3+4.4 \end{bmatrix}_{3\,x\,3} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2+(-6) & 4+0 & 6+12 \\ 0+(-2) & 0+0 & 0+4 \\ -1+(-8) & -2+0 & -3+16 \end{bmatrix}_{3\,x\,3} = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 18 \\ -2 & 0 & 4 \\ -9 & -2 & 13 \end{bmatrix}_{3\,x\,3}$$

Na multiplicação entre Matrizes é entendido que acontece uma mudança, não apenas nas entradas da Matriz resultante, mas também no formato da Matriz. Como no caso acima, onde existiam Matrizes de ordem 3x2 e 2x3, o produto é uma Matriz de ordem 3x3. Percebe-se que também existem situações em que a ordem não se altera, como em multiplicações com Matrizes quadradas.

As propriedades do produto entre Matrizes são definidas como:

I) Associativa: (A.B).C= A.(B.C)

II) Distributiva: A.(B+C)=AB+AC

(A+B).C=AC+BC

III) Comutativa em relação ao escalar: (xA).B=A.(xB)=x(AB)

IV) Elemento Neutro: $A.I_n=A=I_n.A$

Das propriedades do produto entre Matrizes nota-se que não foi mencionada a propriedade comutativa. Então A.B ≠ B.A para qualquer Matriz A e B. Utilizando as mesmas Matrizes do exemplo anterior, com o produto entre as duas, pode-se perceber com clareza isso:

Seja A=$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}_{3\,x\,2}$ e B=$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{2\,x\,3}$, então A.B= $\begin{bmatrix} -4 & 4 & 18 \\ -2 & 0 & 4 \\ -9 & -2 & 13 \end{bmatrix}_{3\,x\,3}$

Agora, fazendo o produto B.A tem-se:

$$B.A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{2\,x\,3} . \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}_{3\,x\,2} = \begin{bmatrix} 1.2 + 2.0 + 3.(-1) & 1.(3) + 2.(1) + 3.(4) \\ -2.(2) + 0.(0) + 4.(-1) & -2.(3) + 0.(1) + 4.4 \end{bmatrix}_{2\,x\,2}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 + 0 + (-3) & 3 + 2 + 12 \\ -4 + 0 + (-4) & -6 + 0 + 16 \end{bmatrix}_{2\,x\,2} = \begin{bmatrix} -1 & 17 \\ -8 & 10 \end{bmatrix}_{2\,x\,2}$$

Pode-se identificar que A.B= $\begin{bmatrix} -4 & 4 & 18 \\ -2 & 0 & 4 \\ -9 & -2 & 13 \end{bmatrix}_{3\,x\,3}$ e B.A =$\begin{bmatrix} -1 & 17 \\ -8 & 10 \end{bmatrix}_{2\,x\,2}$

Então, A.B $\neq$ B.A.

2.2.5 Transposição de uma Matriz

A transposição de uma Matriz ocorre de tal formar que sendo A=$[a_{ij}]_{mxn}$ e sua tranposta A´=$[b_{ij}]_{nxm}$. As linhas de A´ são as colunas de A e da mesma forma as colunas da transposta são as linhas de A. Exemplo:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}_{3\,x\,2}, A' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}_{2X3}$$

Segundo Boldrini (1980, p. 8) as Matrizes transpotas têm as seguintes propriedades:

> I uma matriz é simétrica se, e somente se ela é igual à sua tranposta, isto é, se, e somente se A=A´
> II A”=A. Isto é, a transposta da tranposta de uma matriz é ela mesma
> III (A+B)’=A’+B’. A transposta de uma soma pe igual a soma das transpostas.
> IV (kA)’=kA’, onde k é qualque escalar.

Segundo Iezzi (1977, p. 53), a propriedade usando o produto de Matrizes e transposta se define: $(AB)^t = B^t A^t$.

2.2.6 Inversão de uma Matriz

Considerando uma Matriz quadrada $A=[aij]_n$, existe uma Matriz B, tal que A.B = I = B.A. Assim considera-se que A é inversível. Caso não existe B que satisfaça esta relação consideramos que A é uma Matriz singular.

Segundo Iezzi (1977), a Matriz inversível tem o seguinte teorema e demonstração:

Teorema: Se A é inversível, então é única a Matriz B, tal que $AB=BA=I_n$.

Demonstração: Admitamos que exista uma Matriz C, tal que $AC=CA=I_n$, tem-se:

$$C=I_nC=(BA)C=B(AC)=BI_n=B.$$

Define-se a inversa de A como A^{-1}, que como viu-se anteriormente, $A.A^{-1}=I_n=A^{-1}.A$

Então: Considerando as Matrizes $A=\begin{bmatrix} 1/5 & -2/5 \\ 2/5 & 1/5 \end{bmatrix}_{2\,x\,2}$ e a sua inversa $A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}_{2\,x\,2}$

$$A.A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}_{2\,x\,2} . \begin{bmatrix} 1/5 & -2/5 \\ 2/5 & 1/5 \end{bmatrix}_{2\,x\,2}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.\,1/5 + 2.(2/5) & 1.(-2/5) + 2.\,1/5 \\ -2.\,1/5 + 1.\,2/5 & -2.(-2/5) + 1.\,1/5 \end{bmatrix}_{2\,x\,2} = \begin{bmatrix} 1/5 + 4/5 & -2/5 + 2/5 \\ -2/5 + 2/5 & 4/5 + 1/5 \end{bmatrix}_{2\,x\,2} =$$

$$= \begin{bmatrix} 5/5 & 0 \\ 0 & 5/5 \end{bmatrix}_{2\,x\,2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

$$A^{-1}.A = \begin{bmatrix} 1/5 & -2/5 \\ 2/5 & 1/5 \end{bmatrix}_{2\,x\,2} . \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}_{2\,x\,2} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1/5\,.1 + (-2/5).(-2) & 1/5\,.2 + (-2/5).1 \\ 2/5\,.1 + 1/5\,.(-2) & 2/5\,.2 + 1/5\,.1 \end{bmatrix}_{2\,x\,2} = \begin{bmatrix} 1/5 + 4/5 & 2/5 - 2/5 \\ 2/5 - 2/5 & 4/5 + 1/5 \end{bmatrix}_{2\,x\,2}$$

$$= \begin{bmatrix} 5/5 & 0 \\ 0 & 5/5 \end{bmatrix}_{2\,x\,2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

2.3 Determinantes

O determinante da Matriz é um número Real resultante de um procedimento que só pode ser realizado em Matrizes quadradas. A Matriz quadrada tem o mesmo número de linhas e colunas e também possui duas diagonais, uma principal e uma secundária. Os métodos para obter o determinante de uma Matriz $[A]_n$ são determinados pelo tamanho da Matriz, ou seja, sua ordem.

Segundo Boldrini (1980), define-se o determinante da seguinte forma:

$$\text{Det[aij]}= \sum_{p}(-1)^{J} a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}$$

Onde $J=J(j_1,...,j_n)$ indica o número de inversões da permutação $(j_1, j_2, ..., j_n)$ e p indica que a soma é estendida a todas as n! permutações dos números 1,2, ..., n.

As permutações são as disposições de números ou elementos em determinada ordem. A quantidade de permutações está relacionada à ordem da Matriz. E as inversões são o número de mudanças necessária na permutação para que esta retorne ao valor inicial.

Como exemplo temos uma Matriz de ordem 2 e, então, pode-se ter duas combinações possíveis entre os elementos das diagonais, pois 2! = 2. Em uma das combinações não ocorre inversão e na outra ocorre uma inversão.

$$\det A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - (a_{12}a_{21})$$

Considera-se A uma Matriz de ordem 2, desta forma, seu determinante pode ser calculado da seguinte forma:

$$A_{2X2} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathrm{D_A} = (-5*1-(3*0)) = -5$$

Considerando que $a_{11}a_{21}$ é a permutação original e que a partir dela houve uma troca de elementos, o j de a_{11} trocado pelo j de a_{22}. Esta troca de elementos dentro das entradas da permutação é uma inversão, definida por J.

E, para saber o número de permutações de uma matriz quadrada de ordem 3 é preciso fazer o fatorial da ordem, no caso 3!=6.

Desta forma, são 6 permutações que possuem 3 elementos cada. Assim:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$D = \sum (-1) \; a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}$$

$$D = (-1)^0 a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)^1 a_{11}a_{23}a_{32} + (-1)^1 a_{12}a_{21}a_{33} + (-1)^2 a_{12}a_{23}a_{31} + (-1)^2 a_{13}a_{21}a_{32} + (-1)^3 a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= \left(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}\right) - \left(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}\right)$$

A primeira permutação é igual a diagonal principal, então não houve inversões, mas nas outras 5 permutações há pelo menos uma inversão, conforme mostra a Tabela 1, a seguir.

Tabela 1: Permutações e inversões do determinante.

Permutações	Inversões
$a_{11}a_{22}a_{33}$	0
$a_{11}a_{23}a_{32}$	1
$a_{12}a_{21}a_{33}$	1
$a_{12}a_{23}a_{31}$	2
$a_{13}a_{21}a_{32}$	2
$a_{13}a_{22}a_{31}$	3

Abaixo, segue um exemplo do cálculo de determinante de uma Matriz quadrada A, de ordem 3.

$$A_3 = \begin{bmatrix} 16 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \\ -15 & 10 & 1 \end{bmatrix}; \mathrm{D_A} = (16*0*1+0*2*(-15)+(-1)*5*10)-((-1)*0*(-15)+16*2*10+0*5*1)$$

$$= (0+0-50)-(0+320+0) = -50-320 = -370$$

O método das permutações para calcular o determinante de uma Matriz pode, preferencialmente, ser explorado para Matrizes com ordem maiores que 3, tendo em vista que há outros procedimentos mais facilitados para ordens menores. Para facilitar a determinação de um determinante de ordem três, existe um processo onde repetem-se as duas primeiras colunas ao lado da Matriz e calcula-se o determinante.

Utilizando-se do exemplo de Matriz acima, segue a explicação desse método de resolução de determinantes de uma Matriz de ordem 3:

$$A_3 = \begin{bmatrix} 16 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \\ -15 & 10 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 16 & 0 \\ 5 & 0 \\ -15 & 10 \end{matrix}$$

Toma-se a Matriz A_3 e copiam-se, ao seu lado, suas duas primeiras colunas. Nota-se que não somente a diagonal principal e secundária estão com três entradas, mas sim mais duas diagonais no sentido da principal e mais duas no sentido da secundária.

$$A_3 = \begin{bmatrix} 16 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \\ -15 & 10 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 16 & 0 \\ 5 & 0 \\ -15 & 10 \end{matrix}$$

Somam-se os produtos da multiplicação realizada em cada diagonal no sentido da principal e o mesmo é feito com os produtos obtidos em cada multiplicação dos termos das diagonais no sentido da secundária. Nesse processo, o somatório dos produtos das diagonais secundárias será subtraído do somatório dos produtos obtidos pela multiplicação entre os termos das diagonais principais, obtendo-se o determinante de A_3 da seguinte forma:

$$D_{A3} = (16*0*1+0*2*(-15)+(-1)*5*10) - ((-1)*0*(-15)+16*2*10+0*5*1)$$
$$D_{A3} = (-50) - (320) = -50 - 320 = -370$$

Esse processo é conhecido como Regra de Sarrus, útil para o cálculo do determinante de uma Matriz de ordem 3.

3 ENSINO DE MATRIZES NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Não é de hoje que a aprendizagem da Matemática é percebida como difícil para parte dos alunos. A complexidade do seu conteúdo e a falta de contextualização deste, torna cada dia maior a distância entre o aluno e o professor. As incontáveis definições e propriedades, a cada ano com um grau maior de dificuldade ajudam neste distanciamento.

> É muito comum observarmos nos estudantes o desinteresse pela matemática, o medo da avaliação, pode ser contribuído, em alguns casos, por professores e pais para que esse preconceito se acentue. Os professores na maioria dos casos se preocupam muito mais em cumprir um determinado programa de ensino do que em levantar as ideias prévias dos alunos sobre um determinado assunto. Os pais revelam aos filhos a dificuldade que também tinham em aprender matemática, ou até mesmo escolheram uma área para sua formação profissional que não utilizasse matemática (VITTI, 1999, p. 32-33 *apud* SANTOS, FRANÇA, SANTOS, 2007, p.15)

O objeto de conhecimento Matrizes, como tantos outros, acaba tendo seu ensino afetado na educação básica pelo mesmo ciclo dos demais objetos matemáticos. Apesar de ter aplicação em várias áreas, principalmente tecnológicas, normalmente não é contextualizada com a realidade do aluno, mesmo que seu uso remeta até o seu cotidiano, limitando-se a definições, conceitos e listagens de exercícios.

> O fracasso do ensino de matemática e as dificuldades que os alunos apresentam em relação a essa disciplina não é um fato novo, pois vários educadores já elencaram elementos que contribuem para que o ensino da matemática seja assinalado mais por fracassos do que por sucessos (VITTI, 1999, p. 19, *apud* SOUZA et al, 2018, p. 3).

Segundo D'Ambrósio (1989), o ensino descontextualizado acabou gerando várias consequências não positivas, que mesmo na atualidade ainda têm seus efeitos nas gerações de alunos que seguem. São dois aspectos:

> Primeiro, alunos passam a acreditar que a aprendizagem de matemática se dá através de um acúmulo de fórmulas e algoritmos. Aliás, nossos alunos hoje acreditam que fazer matemática é seguir e aplicar regras. Regras essas que foram transmitidas pelo professor. Segundo, os alunos acham que a matemática é um corpo de conceitos verdadeiros e estáticos, do qual não se duvida ou questiona, nem mesmo nos preocupamos em compreender porque funciona. Em geral, acreditam também, que esses conceitos foram descobertos ou criados por gênios (p. 15)

Passados mais de trinta anos da referida publicação de D'Ambrósio, ainda é possível perceber que estes aspectos são ainda marcantes no ensino da Matemática. Os alunos acreditam que Matemática é seguir e aplicar regras sempre que a metodologia da repetição e memorização continua sendo aplicada em sala de aula.

Preocupa o fato das consequências que essa escolha metodológica gera no processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Os alunos aprendem a não questionar sobre o objeto em estudo, reduzindo, assim, o aspecto crítico e também a exploração de diferentes e criativas resoluções.

> Mesmo nos dias de hoje não é difícil encontrar alunos – quer seja na educação básica

> ou superior – que se questionam e/ou indagam seus professores sobre a utilidade de alguns conteúdos de matemática. Aulas conduzidas de maneira pouco diversificadas, sem estímulos e a falta de habilidade por parte de alguns professores em articular a Matemática com outras áreas do conhecimento, parecem contribuir para este quadro. A busca pelo significado dos conteúdos estudados pode ser o caminho (PEREIRA e CEDRO, 2015, p. 13).

Sendo a Matemática apresentada rígida e inalterável, faz com que os alunos a considerem sem alcance e que os poucos que conseguem tenham resultados positivos e avancem com mais facilidade sejam considerados como gênios pelos colegas.

> É consensual a ideia de que não existe um caminho que possa ser identificado como único e melhor para o ensino de qualquer disciplina, em particular da matemática. No entanto, conhecer diversas possibilidades de trabalho em sala de aula é fundamental para que o professor construa a sua pratica. Dentre elas, destaca se a história da matemática, as tecnologias da comunicação e os jogos como recursos que podem fornecer os contextos dos problemas, como também os instrumentos para construção das estratégias de resolução (BRASIL, 1997, p. 42).

A contextualização, na atuação pedagógica, seja por parte histórica ou por tecnologias é necessária para que esta barreira criada e por muitos anos ainda alimentada seja extinta ou pelo menos enfraquecida.

> Para desempenhar seu papel de mediador entre o conhecimento matemático e o aluno, o professor precisa ter um sólido conhecimento dos conceitos e procedimentos dessa área e uma concepção de Matemática como ciência que não trata de verdades infalíveis e imutáveis, mas como ciência dinâmica, sempre aberta à incorporação de novos conhecimentos (BRASIL, 1999, p. 32).

De acordo com as competências específicas de Matemática e suas tecnologias para o ensino médio, evidencia-se a utilização de estratégias, conceitos e procedimentos para situações em diversos contextos; o propósito ou participação na investigação de desafios cotidianos; compreensão e utilização, de forma flexível e precisa, diferentes registros de representação matemáticos; estabelecimento de conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos (BRASIL, 2018).

O objeto de conhecimento Matrizes possui proximidade com situações cotidianas do aluno, pois a relação de uma simples tabela de preços, uma lista de supermercados, a própria chamada de sala de aula, como também a programação nos *notebooks* e *smartphones* são criados a partir da elaboração e resolução de Matrizes.

> Em uma análise mais aprofundada, é possível perceber que elas fazem parte do cotidiano, seja em anúncios de propagandas ou uma mostra de opiniões de determinada pesquisa, em tabelas de comparação de preços, em jogos de passatempo, em organização de tabelas de horários de uma empresa e outras situações que não

> percebemos devido ao uso corriqueiro (ZANINI, 2012, p. 9).

Esta proximidade com o aluno por ser um objeto matemático com possibilidades de aplicação por se fazer presente em vários meios, de tecnológicos a sociais, da sociedade é bem esclarecida por um trecho do trabalho de Figueredo que diz: “É este tipo de tratamento que as Matrizes possibilitam (por linhas, por colunas, por elemento) que fazem desses objetos matemáticos instrumentos valiosos na organização e manipulação de dados” (2009, p.9).

Esta manipulação e organização de dados que Figueredo (2009) se refere permite que conhecimentos sobre Matrizes sejam utilizados em diferentes áreas do conhecimento, não apenas na Matemática, mas em currículos da área da saúde, tecnologia e engenharia, por exemplo.

Ainda que conhecimentos sobre Matrizes sejam úteis em diversas áreas do conhecimento, não pode se perder de vista que estas são um objeto de conhecimento matemático e possuem toda uma estrutura própria de conceitos e teorias que as tornam importante por elas mesmas no universo da Matemática, indo além do que é útil no cotidiano.

> (...) as matrizes não são simplesmente uma ferramenta de notação para resolver sistema de equações; elas também podem ser vistas como objetos matemáticos de vida própria, existindo uma teoria rica e importante associada a elas, que tem uma grande variedade de aplicações práticas (ANTON, 2012, p.17).

Como as Matrizes fazem parte de determinadas situações da vida cotidiana, sua contextualização pode se dar se forma simples, pois não precisa buscar algo que vincule o objeto matemático e o aluno, mas sim escolher em qual contexto ela pode oferecer uma melhor profundidade. Para que este contexto seja definido, também é necessário conhecimento amplo do professor tanto sobre Matrizes e suas aplicações, como também sobre a realidade de seus alunos.

> Ao considerarmos o processo de ensino-aprendizagem em álgebra, percebemos que o tradicionalismo em meio ao uso abusivo de simbologias matemáticas em problemas algébricos é um dos principais responsáveis (senão o maior) pela descrença de que os conteúdos matemáticos possam de alguma forma, auxiliar indivíduos em circunstâncias cotidianas. No que concerne ao processo de ensino-aprendizagem de matrizes, podemos inferir que este se caracteriza pela utilização de regras que, de um modo geral, apresentam-se completamente desvinculadas da realidade dos alunos. Para Sanches (2002, p.6) o ensino de matrizes apresenta-se em “total descompasso com os avanços tecnológicos e com os estudos já realizados pela Psicologia Educacional”. Percebemos ainda, que poucos são os livros didáticos adequados para auxiliar o ensino de matemática, particularmente de matrizes, dado que muitos apresentam confusões conceituais, linguagem inadequada, raras contextualizações e exercícios repetitivos, o que prejudica o desenvolvimento do raciocínio lógico matemático dos educandos (MESSIAS, et al, 2007, p.2).

4 APLICABILIDADE DE MATRIZES E SUAS POSSIBILIDADES PARA O ENSINO NA EDUCAÇÃO BÁSICA

É possível encontrar o objeto de conhecimento Matrizes aplicado, com aplicações de alguns de seus objetos de conhecimento específicos, em diversas áreas do conhecimento. Seja na criação de programas, na categorização de produtos e na relação de uma amostragem, entre outros.

Sendo viável sua aplicabilidade, percebe-se ser possível relacionar no desenvolvimento de atividades no ensino médio da educação básica.

Em algumas variações dos conhecimentos sobre Matrizes, dadas algumas de suas complexidades em possíveis contextualizações, em modelos que exigem um conhecimento mais elaborado, fazem com que se torne difícil para aplicar no ensino básico. Contudo, os estudos realizados pelo autor, possibilitaram a construção de algumas propostas de ensino que oportunizam a apresentação, a alunos do segundo ano do ensino médio, conhecimentos com aplicabilidades.

Então, apresentam-se, a seguir, algumas possibilidades de aplicações de Matrizes que poderão ser analisadas e avaliadas por professores da educação básica para possível aplicação com alunos do ensino médio da educação básica.

4.1 Notas obtidas por um Aluno

No ensino de Matemática, o processo avaliativo, em muitas realidades escolares, é denotado aos alunos e familiares por meio de notas, valores numéricos.

Considerando-se que um aluno A que cursa seis componentes curriculares, Matemática, Português, História, Geografia, Ciências e Educação Física, chegando ao final do ano letivo ele ainda não recebeu seu boletim, mas já sabe todas suas notas trimestrais. Estas notas se apresentam na tabela 2, a seguir:

Tabela 2: Notas trimestrais de um aluno A.

Componente Curricular	1º trimestre	2º trimestre	3º trimestre
Matemática	7	6	8
Português	7	6,5	8
História	8	8,5	9

Geografia	8,5	7,5	8
Ciências	9	9,5	8,5
Ed.Física	10	9,5	10

A partir dos dados da tabela, é possível representa-los por meio de uma Matriz M_{6x3}.

$$M_{6x3} = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 8 \\ 7 & 6,5 & 8 \\ 8 & 8,5 & 9 \\ 8,5 & 7,5 & 8 \\ 9 & 9,5 & 8,5 \\ 10 & 9,5 & 10 \end{bmatrix}$$

A partir da Matriz acima algumas questões podem ser levantadas. Sabe-se que cada linha representa as notas de cada um dos componentes curriculares e cada coluna apresenta todas as notas, de cada trimestre. Então, perguntas podem ser feitas relacionadas aos dados.

Seguem alguns questionamentos passíveis de trabalhar com os alunos e as respostas possíveis que um professor poderia obter:

1) Qual é a entrada da Matriz que representa a melhor nota do aluno no 3º trimestre? O terceiro trimestre é representado pela terceira coluna da matriz e a melhor nota é um 10 em Educação Física, representado pelo elemento a_{63}.

2) A Matriz representa as notas trimestrais, mas como se poderia criar uma nova matriz que contenha cada média anual do aluno A?

Lembrou-se de multiplicação entre Matrizes, onde a nova matriz A tem que ser de ordem 6x1 e a Matriz B que foi multiplica com M só pode ser de ordem 3x1.

Então A = M_{6x3} x B_{3x1}, sendo que A_{6x1}.

$$A_{6x1} = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 8 \\ 7 & 6,5 & 8 \\ 8 & 8,5 & 9 \\ 8,5 & 7,5 & 8 \\ 9 & 9,5 & 8,5 \\ 10 & 9,5 & 10 \end{bmatrix} x \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7*\frac{1}{3}+6*\frac{1}{3}+8*\frac{1}{3} \\ 7*\frac{1}{3}+6,5*\frac{1}{3}+8*\frac{1}{3} \\ 8*\frac{1}{3}+8,5*\frac{1}{3}+9*\frac{1}{3} \\ 8,5*\frac{1}{3}+7,5*\frac{1}{3}+8*\frac{1}{3} \\ 9*\frac{1}{3}+9,5*\frac{1}{3}+8,5*\frac{1}{3} \\ 10*\frac{1}{3}+9,5*\frac{1}{3}+10*\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 7,2 \\ 8,5 \\ 8 \\ 9 \\ 9,8 \end{bmatrix}$$

4.2 Matrizes e Semáforos

É comum nos cruzamentos das cidades encontrarmos semáforos. Normalmente, os semáforos são instalados levando em consideração a logística do tráfego naquele ponto, considerando, geralmente, cruzamentos com maior número de veículos e/ou incidência de acidentes. Na cidade de Cachoeira do Sul/RS, tem um cruzamento constituído de cinco esquinas e conhecido por conta dessa característica.

Levando em consideração o trajeto e a direção de cada uma das vias neste cruzamento e a ordem e tempo dos semáforos, pode-se criar tabelas para cada uma das mudanças de sinais. O local realmente existe a cidade, mas a ordem dos sinais e tempo da sinaleira não é fiel ao que era usado, foram usados intervalo de tempos diferentes e sequências diferentes, pois os semáforos foram retirados do local.

Assim, considerando o primeiro sinal a abrir criou-se uma tabela, chamada de Intervalo 1 que tem todos os valores que representa o tempo de sinal aberto em segundos, conforme apresenta o quadro 1, a seguir:

Quadro 1: Semáforo em A.

De 0 até 20 segundos					
	A	B	C	D	E
A	0	20	20	20	20
B	0	0	0	0	0
C	0	0	0	0	0
D	0	0	0	0	0
E	0	0	0	0	0

Nesta tabela é possível observar que o semáforo abriu no ponto A e que o sentido vai de A para os outros pontos.

Agora no intervalo 2 os sentidos de A pra C,D e E estão fechados enquanto que de A para B continua aberto. E também abre o sinal em B, nos sentidos de B para C, D e E, como representa o quadro 2, abaixo:

Quadro 2: Semáforo em B

De 20 até 40 segundos					
	A	B	C	D	E
A	0	20	0	0	0
B	0	0	20	20	20
C	0	0	0	0	0
D	0	0	0	0	0
E	0	0	0	0	0

No intervalo 3 fecham todos os sinais de A e B, abrindo o semáforo em C nos sentidos C para B, D e E, conforme o quadro 3:

Quadro 3: Semáforo em C

De 40 até 60 segundos

	A	B	C	D	E
A	0	0	0	0	0
B	0	0	0	0	0
C	0	20	0	20	20
D	0	0	0	0	0
E	0	0	0	0	0

Por último abre o sinal em D nos sentidos de D para B, C e E. Algumas observações podem ser feitas como o ponto E não tem sinaleira e tem apenas uma direção e um sentido e no ponto A que tem quatro direções tem apenas um sentido também por que não chegam carros em A, apenas saem.

Quadro 4: Semáforo em D

De 40 até 60 segundos					
	A	B	C	D	E
A	0	0	0	0	0
B	0	0	0	0	0
C	0	20	20	0	20
D	0	0	0	0	0
E	0	0	0	0	0

Ao tomar a primeira tabela e descartar os seus índices obtém-se, como mostra o Quadro 4, os resultados:

Quadro 5: Semáforo em A

0	20	20	20	20
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

Ao retirar as marcações de linhas e colunas obtém-se uma Matriz com cinco linhas e cinco colunas, que se pode nomear Matriz A_{5x5}. Ao fazer este procedimento com as demais tabelas quadradas, em ordem, obtém-se as Matrizes B, C e D, todas de ordem 5.

Considerando o ciclo do semáforo para este cruzamento, quanto tempo levou todo o processo? E quanto tempo ficou aberto o sinal no tempo A?

Então adicionando as Matrizes A, B, C e D:

$$\begin{vmatrix} 0 & 20 & 20 & 20 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 20 & 20 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 20 & 0 & 20 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 20 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Utilizando as propriedades de soma de Matriz resulta em uma Matriz Soma, S_{5x5}, seguinte:

$$S_{5x5} = \begin{vmatrix} 0 & 40 & 20 & 20 & 20 \\ 0 & 0 & 20 & 20 & 20 \\ 0 & 20 & 0 & 20 & 20 \\ 0 & 20 & 20 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Nesta Matriz S_{5x5} identifica-se que o tempo máximo que o sinal em A ficou aberto foi 40 segundos e nos demais pontos foi de 20 segundos. Lembrando que a linha da Matriz representa o intervalo que o sinal ficou aberto, então não é possível adicionar os valores de cada linha, pois os segundos em cada entrada de cada linha são simultâneos por estarem dentro do mesmo intervalo.

Uma atividade que o autor identifica ter potencial para ser utilizada com alunos no ensino básico.

4.3 Gasto Calórico em Atividade Física

Considera-se a seguinte situação-problema a ser apresentada aos alunos:

Um homem, que tem massa corporal de 70 quilogramas (70Kg), organiza uma agenda de atividades físicas levando em consideração todos os dias da semana e cinco diferentes atividades, conforme a tabela 3, abaixo:

Tabela 3: Horas de atividade física diária por tipo de atividade física.

Dia da semana	natação	corrida	basquete	musculação	tênis
Segunda-feira	1,00	0	0	1,5	0
terça-feira	0	0,5	1,5	0,5	0
quarta-feira	1	0	1	0	0
quinta-feira	0	1	0	2	1,5
sexta-feira	0	1	1,5	0	0
sábado	1,5	0	0	1	0
domingo	0	1	0,5	0	2

Ele deseja saber qual o consumo de quilocalorias, ao dia, dentro desses horários e tipos de atividade física que desempenha.

Para isso, os alunos terão que realizar pesquisas sobre quantidade de quilocalorias que cada atividade proporciona a ele. Os alunos podem ser convidados a fazer essa pesquisa em suas casas, como tarefa, ou em aula, em pesquisa online.

A tabela 4, a seguir, representa o gasto calórico, em quilocalorias (kcal), aproximado, para cada uma dessas atividades físicas, para este homem que pesa 70 kg, durante uma hora.

Tabela 4: Gasto calórico em cada tipo de atividade física, por hora:

Tipo de Atividade Física	Homem de 70kg
natação	500
corrida	900
basquete	600
musculação	300
tênis	480

Fonte: marcioatalla.com.br

Transformando ambas as tabelas em Matrizes são obtidas as Matrizes A_{7x5} e B_{5x1}, representadas a seguir:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1{,}5 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 1{,}5 & 0{,}5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1{,}5 \\ 0 & 1 & 1{,}5 & 0 & 0 \\ 1{,}5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0{,}5 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 500 \\ 900 \\ 600 \\ 300 \\ 480 \end{bmatrix}$$

Com estas duas Matrizes é possível saber a quantidade diária de calorias que este homem irá queimar. Para isto $A_{7x5}*B_{5x1}=C_{7x1}$, onde a Matriz C representa em cada uma de suas entradas a quantidade diária queimadas por meio das atividades.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1,5 & 0\\ 0 & 0,5 & 1,5 & 0,5 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1,5\\ 0 & 1 & 1,5 & 0 & 0\\ 1,5 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0,5 & 0 & 2\end{bmatrix} * \mathrm{B}=\begin{bmatrix}500\\ 900\\ 600\\ 300\\ 480\end{bmatrix}=C\begin{bmatrix}1*500+0*900+0*600+1,5*300+0*480\\ 0*500+0,5*900+1,5*600+0,5*300+0*480\\ 1*600+0*900+1*600+0*300+0*480\\ 0*500+1*900+0*600+2*300+1,5*480\\ 0*500+1*900+1,5*600+0*300+0*480\\ 1,5*500+0*900+0*600+1*300+0*480\\ 0*500+1*900+0,5*600+0*300+2*480\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}950\\ 1500\\ 1100\\ 2220\\ 1800\\ 1050\\ 1860\end{bmatrix}$$

Este homem, por meio de cinco diferentes tipos de atividade física, queima 950 kcal na segunda-feira, 1.500 kcal na terça-feira, 1.100 kcal na quarta-feira, 2.220 kcal na quinta-feira, 1.800 kcal na sexta-feira, 1.050 kcal no sábado e 1.860 kcal no domingo.

5 METODOLOGIA

Este trabalho final de graduação apresenta um estudo bibliográfico sobre Matrizes, especialmente no que se refere a sua definição e aspectos que envolvem sua aplicabilidade.

Para isso, utilizou-se de uma revisão bibliográfica exploratória. A pesquisa bibliográfica desenvolve-se a partir de material pré-elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos, justamente o que o correu para este trabalho de pesquisa.

Conforme Gil (2008), a pesquisa exploratória busca explicar o problema proporcionando ao observador uma maior familiaridade com o mesmo, assumindo, geralmente, a forma de uma pesquisa bibliográfica ou um estudo de caso.

Um estudo exploratório se dá quando um estudo se encontra na fase preliminar, e tem como fim obter maiores informações sobre o assunto investigado, possibilitando sua definição e seu delineamento. É um instrumento que possibilita reforçar os objetivos da pesquisa e a formulação das hipóteses, ou até mesmo a descoberta de um novo tipo de enfoque para o assunto (PRODANOV e FREITAS, 2013).

Utilizou-se de uma abordagem qualitativa na exploração dos dados da pesquisa aqui apresentada, uma vez que se pretendeu clarear o problema por meio de um conjunto de técnicas interpretativas, diferentemente da pesquisa descritiva, cuja prioridade é a utilização de técnicas padronizadas de coleta de dados.

A análise qualitativa possui múltiplas possibilidades, segundo Tesch (1990) *apud* Gil (2008), definindo dez princípios e práticas orientadoras: 1. A análise não é a última fase do processo de pesquisa, sendo cíclica ou concomitante com a coleta de dados. A rigor, o processo de análise inicia-se no momento da própria coleta; essas duas etapas se comunicam. 2. O processo de análise não é rígido, mas sim sistemático e compreensivo. 3. O acompanhamento dos dados inclui uma atividade reflexiva do pesquisador, que obtém um conjunto de notas de análise que guiam o processo, possibilitando o registro do processo. 4. Os dados são subdivididos em unidades relevantes e significativas, mantendo uma conexão com o todo, tendo a análise intenção de promover algum tipo de explicação sobre eles. 5. Os segmentos de dados são categorizados de acordo com um sistema organizado predominantemente derivado dos próprios dados. 6. A principal ferramenta intelectual é a comparação, cujos procedimentos são usados nos mais diversos momentos do processo de análise, podendo, os dados obtidos, ser comparados com modelos já definidos, com dados de outras pesquisas e também com os próprios dados, viabilizando estabelecimento de categorias, definição de amplitude, organização do conteúdo de cada categoria e testagem das hipóteses.

Para atingir o objetivo de pesquisa desenvolveu-se, então, um estudo exploratório de abordagem qualitativa, por meio da estratégia de pesquisa bibliográfica, buscando dados em artigos, e-books e livros.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A realização deste trabalho possibilitou trabalhar com aplicações de Matrizes, por meio de atividades contextualizadas, mostrando que é possível pensar em atividades de ensino que podem ser acessíveis aos alunos, valorizando a riqueza de suas aplicabilidades em temas que façam parte do cotidiano dos estudantes.

Foi possível criar atividades relacionadas a aplicações de Matrizes, identificando como possibilidades de ensino a serem trabalhadas em sala de aula, na educação básica.

Do mesmo modo, ao trabalhar na construção das atividades de ensino, foi possível estabelecer o objeto matemático a ser trabalhado explorando e relembrando conceitos básicos de Matrizes por meio de uma construção do conhecimento.

Nas pesquisas sobre o ensino de Matrizes foi possível encontrar referencial em que se mostra a importância desse objeto matemático, por ser um conhecimento passível de apresentar algumas de suas aplicabilidades, tanto no âmbito profissional, quanto acadêmico. A abordagem da aplicabilidade de Matrizes efetivou-se, nas propostas aqui apresentadas, com assuntos contextualizados e que podem ser avaliados por professores e aplicados com seus alunos.

A revisão bibliográfica exploratória, como metodologia de pesquisa deste trabalho, foi importante para explorar as pesquisas, livros e artigos referentes ao assunto abordado, e facilitou a elaboração de argumentos válidos para organizar o trabalho e responder à questão de pesquisa.

O presente trabalho contribuiu para a construção de saberes específicos e pedagógicos do autor, professor de Matemática em formação, pois viabilizou conhecer e explorar distintas possibilidades de aplicações de um objeto matemáticos até então desconhecidas pelo autor.

Também se constituiu na intenção de apresentar propostas de ensino que possam vir a ser analisadas, avaliadas e aperfeiçoadas por professores da educação básica, estudando formas de aplicação com seus alunos.

Trata-se de um trabalho que vislumbrou a necessidade de apresentar atividades de ensino para o objeto de conhecimento Matrizes, com potencial para serem aplicadas com alunos da educação básica, propondo atividades que encorajem e facilitem a aprendizagem.

REFERÊNCIAS

AMOS, Jonathan. Correspondente em Ciência da BBC News. Brasileiro cresce em altura nos últimos cem anos, mas ainda é “baixinho”; conheça o ranking mundial. **BBC News Brasil**. 26 jul. 2016. Disponível em: https://www.bbc.com/portuguese/geral-36892772#:~:text=O%20homem%20brasileiro%20tem%2C%20em,1914%3A%208%2C6%20cm.&text=Para%20homens%2C%20o%20Brasil%20%C3%A9,de%20Rom%C3%AAnia%2C%20Argentina%20e%20Jamaica. Acesso em 15 dez. 2020.

ANTON, H. **Álgebra Linear com Aplicações**. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular**. BNCC**. Ensino Fundamental e Ensino Médio. Secretaria da Educação Básica. Ministério da Educação. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/a-base. Acesso em 16 dez. 2020.

BRASIL, **Parâmetros Curriculares Nacionais**: matemática. Secretaria de Educação Fundamental - Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: 1º a 3º anos do Ensino Médio.Ministério da Educação. Secretaria da Educação Fundamental. Brasília: MEC-SEF, 1999.

BOLDRINI, J, L. **Álgebra Linear I.** São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980, 3.ed.

D’AMBRÓSIO, B, S. **Como Ensinar Matemática Hoje?** Temas e Debates. SBEM. Ano II. N. 2. Brasilia. 1989. pp. 15-19.

FIGUEREDO, L, M. **Álgebra Linear I**, V.1. 3. ed. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2009.

GIL, A.C. **Métodos e Técnicas de Pesquisa Social**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2008.

IEZZI, G. **Fundamentos de Matemática Elementar.** Vol.4. 2. ed. São Paulo: Atual Ed.,1977.

ATALLA, M. **Tabela de calorias de Atividade Física.** Marcio Atalla, 2018 a 2020. Disponível em https://marcioatalla.com.br/atividade-fisica/tabela-de-calorias-de-atividade-fisica/. Acessado em 30/12/2020.

MESSIAS, M. A. V. F. SÁ, P. F. FONSECA, R.V. **Um Estudo Diagnóstico sobre as Difculdades em Matrizes.** Pará: Universidade do Estado do Pará, 2007. Disponível em http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/anais/ix_enem/Poster/Trabalhos/PO83969659272T.doc. Acessado novembro de 2020.

PEREIRA, A. C. C. CEDRO, W. L. (org.). **Educação Matemática**: diferentes contextos, diferentes abordagens.Fortaleza: EdUECE, 2015.

PRODANOV, C.C. FREITAS, E.C. de. **Metodologia do trabalho científico** [recurso eletrônico]: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico. 2. ed. Novo Hamburgo: Feevale, 2013.

SANTOS, J.; FRANÇA, K. A.; SANTOS, L. S. B. V. dos. Dificuldades na Aprendizagem em Matemática. **Trabalho de conclusão do curso**. Licenciatura em Matemática, SP, Universidade Adventista de São Paulo, 2007. Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/Monografia_Santos.pdf . Acesso em: out. 2020.

SOUZA, A, V, P. OHIRA, M, A. PEREIRA, A, L. **A Arte de Resolver Problemas no Ensino da Matemática.** Revista Valore, Volta Redonda, 3 (Edição Especial): 376-389.2018.

ZANINI, N, J. Matrizes e as Dificuldades de Aprendizagem. **Monografia**. UNESP, São José do Rio Preto, 2012. Disponível em https://www.ibilce.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/matrizes-e-as-dificuldades-de-aprendizagem---norberto-jesus-zanini.pdf. Acessado em novembro de 2020.

WAHRILCH, V. ANJOS, L, A. **Aspectos históricos e metodológicos da medição e estimativa da taxa metabólica basal:** uma revisão da literatura. Rio de Janeiro, 2001. Artigo disponível em https://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0102-311X2001000400015#tab1.

BIBLIOGRAFIA

ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J; HARRIS, F.E. **Física Matemática**: Métodos Matemáticos para Engenharia e Física. 7. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2017.

D'AMBRÓSIO, U. A História da Matemática: questões historiográficas e políticas e reflexos na Educação Matemática. *In:* BICUDO, M. A. V. (org.). **Pesquisa em educação matemática**: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999, p. 97-115. Disponível em http://cattai.mat.br/site/files/ensino/uneb/pfreire/docs/HistoriaDaMatematica/Ubiratan_DAmbrosio_doisTextos.pdf. Acesso em 12. nov. 2020.

LIPSCHUTZ, S.; LIPSON, M. **Álgebra Linear.** 4. ed. Porto Alegre: Bookman, 2011.

MATHIAS, C. **Novas Tecnologias no Ensino da Matemática**: Repensando Práticas. Rio de Janeiro: CECIERJ/CAPES/UAB/MEC, 2008.

PARRA, C.; SAIZ, I. **Didática da Matemática**: Reflexões Psicopedagógica. Porto Alegre, Artmed (Artes Médicas). 1996.

ROQUE, T. **História da matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.